**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ**

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра Математической кибернетики и информационных технологий

Реферат

на тему «Теория вычислимости»

по дисциплине «Теоретические аспекты программирования»

Выполнила: студ. гр. ЗМПП1901

Иванова Е.В.

Преподаватель: профессор, д.т.н., доцент каф. МКиИТ Яшина М.В.

Москва 2020

**Содержание**

[Введение 3](#_Toc55399961)

[1. Основоположники теории вычислимости 4](#_Toc55399962)

[2. Что изучает теория вычислимости 6](#_Toc55399963)

[3. Разрешимость, полуразрешимость и неразрешимость задач 8](#_Toc55399964)

[3.1. Свойства программ 8](#_Toc55399965)

[4. Существование неразрешимого свойства 10](#_Toc55399966)

[Заключение 12](#_Toc55399967)

[Список использованной литературы 13](#_Toc55399968)

# Введение

Теория вычислимости или теория рекурсивных функций - это раздел современной математики и теории вычислений, возникший в результате изучения понятий вычислимости и не вычислимости. Изначально теория была посвящена вычислимым и невычислимым функциям и сравнению различных моделей вычислений. Сейчас поле исследования теории вычислимости расширилось - появляются новые определения понятия вычислимости, и идёт слияние с математической логикой, где вместо вычислимости и не вычислимости идёт речь о доказуемости и недоказуемости (выводимости и не выводимости) утверждений в рамках каких-либо теорий.

# Основоположники теории вычислимости

Теория вычислимости устанавливает граничные возможности обработки информации при помощи компьютера.

Основоположниками теории считаются такие выдающиеся математики как Курт Гёдель, Алонзо Черч и Алан Тьюринг.

Знаменитая [теорема Курта Гёделя о неполноте](https://science.wikia.org/ru/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%93%D1%91%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8F_%D0%BE_%D0%BD%D0%B5%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%B5) ([1931](https://science.wikia.org/ru/wiki/1931)) (если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует невыводимая и неопровержимая формула) была доказана в терминах примитивно рекурсивных функций, класс которых в [1934](https://science.wikia.org/ru/wiki/1934) году Курт Гёдель расширил до класса общерекурсивных функций.

Определение понятия примитивно рекурсивной функции является [индуктивным](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B8%D0%BD%D0%B4%D1%83%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F). Оно состоит из указания класса базовых примитивно рекурсивных функций и двух операторов (суперпозиции и примитивной рекурсии), позволяющих строить новые примитивно рекурсивные функции на основе уже имеющихся.

Частично рекурсивная функция определяется аналогично примитивно рекурсивной, только к двум операторам, суперпозиции и примитивной рекурсии, добавляется ещё третий оператор — минимизации аргумента.

Оператор суперпозиции – это оператор построения сложной функции.

Общерекурсивная функция — частично рекурсивная функция, определённая для всех значений аргументов.

Определение вычислимых функций, данное Геделем, носило синтаксический характер, и лишь установление совпадения класса рекурсивных функций с классом общерекурсивных функций (вместе с формулировкой и «принятием» тезиса Черча) показало действительную значимость теоремы о неполноте.

Алонзо Черч и Алан Тьюринг с разницей в три месяца опубликовали две модели вычисления, в которых они предлагали математические модели алгоритма. Однако Алан Тьюринг доказал, что обе модели эквивалентны.

И таким образом считается, что теория вычислимости берёт свое начало от диссертации Тьюринга (1936), в которой он ввел понятие абстрактной вычислительной машины, получившей впоследствии его имя, и доказал фундаментальную теорему о неразрешимости задачи о её остановке.

# Что изучает теория вычислимости

Теория вычислимости изучает:

1. Алгоритмы – формальные правила решения задач (способы как решить задачу или целый класс задач);
2. Вопросы разрешимости – вопрос существования алгоритмов для решения тех или иных задач, т.е. возможно ли решить задачу;
3. Вопросы неразрешимости – вопрос отсутствия алгоритмов для решения тех или иных задач, т.е. какую задачу нельзя решить.

Таким образом, вычислимой называют функцию, вычисляемую некоторым алгоритмом.

В основе теории вычислимости лежит понятие модели вычислений или системы программирования. Существует множество моделей вычислимости, однако они все эквивалентные. Например, формализм, развитый Куртом Гёделем оказался эквивалентным тьюринговскому (а также многим другим). Таким образом появился экспериментальный факт - тезис Черча-Тьюринга, который гласит о том, что понятие вычислимости не зависит от выбора модели вычислений.

Например, целый класс программирования, который называется функциональными языками программирования, строится на модели вычисления Черча, которая называется лямбда-исчисление.

Лямбда-исчисление (λ-исчисление) — формальная система для формализации и анализа понятия вычислимости.

В основе лямбда-исчисления лежит понятие — анонимная функция. В нём нет встроенных констант, элементарных операторов, чисел, арифметических операций, условных выражений, циклов и т. п. — только функции. Потому что лямбда-исчисление — это не язык программирования, а формальный аппарат, способный определить в своих терминах любую языковую конструкцию или алгоритм. В этом смысле оно созвучно машине Тьюринга, только соответствует функциональной парадигме, а не императивной.

Разработка концепции принадлежит авторству Алонза Черча, она появилась на свет в 1936 г., но поскольку в те далекие времена компьютеров не существовало, она носила чисто теоретический характер. Так было до 1960 г., когда американский ученый-компьютерщик Джон Маккарти опубликовал работу «Рекурсивные функции символьных выражений и их вычисление на машине». В результате его исследования появился первый язык ФП: LISP.

# Разрешимость, полуразрешимость и неразрешимость задач

Итак, вычислимая функция – функция, для которой можно построить некоторый алгоритм. Алгоритм дает процедуру отыскания значений вычислимой функции. Но как отличить вычислимую функцию от невычислимой?

Необходимо четко поставить задачу для программирования:

1. Указать множество входных данных Х и условие , которому должны удовлетворять входные данные задачи;

2. Указать множество выходных данных Y и условие , которому должны удовлетворять выходные данные задачи.

Отсюда следует, что необходимо найти программу, которая любые входные данные, удовлетворяющие условию преобразует в выходные данные, удовлетворяющие условию .

Пара условий и называется последовательной спецификацией задачи программирования.

Таким образом последовательная спецификация определяет свойство программы: программа удовлетворяет или нет этой спецификации.

## **Свойства программ**

1. Свойства программ называется разрешимым, если существует программа-чекер, которая для любой программы по ее гёделевому номеру (или исходному тексту) может установить обладает или нет проверяемая программа этим свойством.

Нумерация Гёделя — это функция g, сопоставляющая каждому объекту некоторого формального языка её номер. С её помощью можно явно пронумеровать следующие объекты языка: переменные, предметные константы, функциональные символы, предикатные символы и формулы, построенные из них.

1. Свойство программ называется неразрешимым, если для него не существует программы-чекера.
2. Свойство программ называется полуразрешимым, если для него существует чекер, дающий ответ в том случае, если проверяемая программа удовлетворяет этому свойству, и «зависающая» в противном случае.
3. Свойство программ называется нетривиальным, если существует как программа, удовлетворяющая ему, так и программа, не удовлетворяющая ему.

Прибегнув к изобретательному варианту диагонального аргумента Кантора, Тьюринг доказал, что существует намного больше функций, чем машин Тьюринга. Другими словами, существуют невычислимые функции.

Исчислимые функции, как и машины Тьюринга, имеются в счетном количестве.

# Существование неразрешимого свойства

Существует свойство известное, как свойство проблемы останова, и оно неразрешимо.

**Свойство:** программа P останавливается на входных данных х0, … , хn.

Проблема остановки (или проблема останова) — это одна из проблем в [теории алгоритмов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC%D0%BE%D0%B2), которая может неформально быть поставлена в виде: даны описание процедуры и её начальные входные данные. Требуется определить: завершится ли когда-либо выполнение процедуры с этими данными; либо, что процедура всё время будет работать без остановки.

[Алан Тьюринг](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%8C%D1%8E%D1%80%D0%B8%D0%BD%D0%B3,_%D0%90%D0%BB%D0%B0%D0%BD) доказал в [1936 году](https://ru.wikipedia.org/wiki/1936_%D0%B3%D0%BE%D0%B4), что проблема остановки [неразрешима](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%B7%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) на [машине Тьюринга](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%88%D0%B8%D0%BD%D0%B0_%D0%A2%D1%8C%D1%8E%D1%80%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D0%B0). Другими словами, не существует общего алгоритма решения этой проблемы.

Проблема остановки занимает центральное место в [теории вычислимости](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B2%D1%8B%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8), поскольку представляет собой первый пример задачи, которую невозможно решить алгоритмическим путём. Для многих других задач можно доказать их алгоритмическую неразрешимость, попытавшись свести задачу к проблеме остановки. Это делается по следующей схеме: пусть есть некая задача, для которой требуется установить её неразрешимость. Тогда предположим, что она разрешима, и попытаемся, используя этот факт, написать алгоритм решения проблемы остановки. Если это удастся, то мы придем к противоречию, ведь известно, что не существует такого алгоритма. А значит, предположение было неверным, и исходная задача также неразрешима.

Рассмотрев проблему останова, Алан Тьюринг предложил отрицательный ответ на вопрос Давида Гильберта о том, «существует ли механическая процедура, которая решала бы все и каждую проблему математики, алгоритм, способный принципиально разрешить все математические вопросы, который при заданной математической пропозиции дал бы нам знать, является она теоремой или нет? Другими словами, является ли она разрешимой в математике?»: если бы существовала эта процедура, она также была бы способна определить за конечное время, останавливается любая машина Тьюринга через конечное число шагов или входит в бесконечную петлю, когда на входе вводятся некоторые данные. Но последнее, как он доказал, невозможно.

В 1951 году американский математик [Генри Гордона Райса](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A0%D0%B0%D0%B9%D1%81,_%D0%93%D0%B5%D0%BD%D1%80%D0%B8_%D0%93%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%BE%D0%BD&action=edit&redlink=1) доказал в докторской диссертации утверждение [теории алгоритмов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC%D0%BE%D0%B2), согласно которому для любого нетривиального свойства [вычислимых функций](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%8B%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) определение того, вычисляет ли произвольный алгоритм функцию с таким свойством, является [алгоритмически неразрешимой задачей](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8_%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%B7%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D1%8F_%D0%B7%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0).

**Теорема Райса:** Всякое нетривиальное свойство программ неразрешимо.

Т.е. не существует программы, которая будет проверять нетривиальное свойство программы.

Из теоремы вытекает следствие: не существует технологии обеспечивающей полную автоматизацию решения задач программирования.

# Заключение

В настоящее время исследования по теории вычислимости активно ведутся во всех странах мира. Россия всегда была одним из мировых центров исследований по теории вычислимости и её приложениям. Эти исследования берут начало от ранних работ  [Маркова](https://science.wikia.org/ru/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%80%D0%BA%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B5%D0%B9_%D0%90%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B5%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87_(%D0%BC%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D1%88%D0%B8%D0%B9)) А.А. и  Мальцева А.И. по теории алгоритмов и её связям с [алгеброй](https://science.wikia.org/ru/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0), ознаменовались решением проблемы сводимости Поста Мучником А.А. Эти исследования сегодня продолжаются на очень высоком уровне во многих научных центрах России.

# Список использованной литературы

1. Лавров С.С. Программирование. математические основы, средства, теория
2. Герасимов А.С. Курс математической логики и теории вычислимости: Учеб. Пособие
3. Видеолекция https://www.youtube.com/watch?v=ZFNim7GuLEk
4. https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/35240